10/16

$A \neq \emptyset$

⊛ $\mathcal{C}$ κάλυψη του A: → $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$
↳ $\bigcup \mathcal{C} = A$

⊛ $\mathcal{D}$ διαμέριση: → $\mathcal{D}$ κάλυψη του A
→ $\forall X, Y \in \mathcal{D}: X \cap Y = \emptyset$
→ $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(A)$

Δεν υποδέχεται το $\emptyset$

Παραδείγματα: ▷ $\mathbb{R}$ διάστημα

$\mathcal{C} = \{ (n-1, n+1), n \in \mathbb{Z} \}$

▷ $X = [1, 10]$

$\mathcal{C} = \{ (q - \frac{1}{10}, q + \frac{1}{10}), \underset{0 \leq q \leq 10}{q \in \mathbb{R}} \}$

▷ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\mathcal{D}_1 = \{ \{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\} \}$

$\mathbb{R}$

$\mathcal{D} = \{ [n, n+1), n \in \mathbb{Z} \}$ // $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$: $[n_1, n_1+1] \cap [n_2, n_2+1]$
$n_1 \leq n_2$

$x \Rightarrow n_1 \leq x < n_1 + 1$

$n_1 \leq n_2 \leq x < n_2 + 1$

άτοπο!

άρα τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους

$\cup \mathcal{D} = \mathbb{R}$ Για $x \in \mathbb{R}$: $[x] \leq x \leq [x]+1 \Rightarrow$
$x \in [[x], [x]+1)$

▷ $A, B \neq \emptyset$

$X = A \cup B$

$\mathcal{D}_x = \{ A-B, B-A, A \cap B \}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι ℓ_1, ℓ_2 διαμέρισεις του E αν $\ell_1 \subseteq \ell_2$ τότε $\ell_1 = \ell_2$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι οι ℓ_1, ℓ_2 είναι διαμερίσεις του E, με $\ell_1 \subseteq \ell_2$. Αρκεί ν.δ.ο. $\ell_2 \subseteq \ell_1$.
Ας είναι $\bar{X} \in \ell_2$. Επειδή $X \neq \emptyset$, $\exists x \in \bar{X} \subseteq E$. Ομοίως η ℓ_1 είναι διαμέριση του E.

Επομένως $\exists A \in \mathcal{C}_1$ με $x \in A$
Επειδή $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ και $A \in \mathcal{C}_1$, έπεται ότι $A \in \mathcal{C}_2$

Όμως, τότε $x \in A \in \mathcal{C}_2$ και $x \in \overline{X} \in \mathcal{C}_2$
όηλ. $A \cap \overline{X} \neq \emptyset$ για $A, \overline{X} \in \mathcal{C}_2$
άρα $A \equiv \overline{X}$
και συνεπώς $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$

(*) Αν $A, B \subseteq E$
και $\mathcal{D}$: διαμέριση του E, τότε
$$\left. \begin{array}{l} A, B \in \mathcal{D} \\ A \cap B \neq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow A \equiv B$$

HW ① Για τη συλλογή $\mathcal{C} = \{(-1/n, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$ να βρε[θούν]
τα $\cup \mathcal{C}, \cap \mathcal{C}$. Είναι η $\mathcal{C}$ κάλυψη του $(-1,1)$, το $[-1, ...$

② Για τη συλλογή $\mathcal{C} = \{(2\frac{n}{2n+1}, \frac{n}{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$ να βρεθο[ύν]
τα $\cup \mathcal{C}, \cap \mathcal{C}$;

③ Αν $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ διαμερίσεις των $E_1, E_2, E_3 \subseteq \Omega$ με
$E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ να εξετάσετε αν η
συλλογή είναι διαμ. του $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

ΣΧΕΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ας είναι $A, B \neq \emptyset$
Σχέση σ από το A στο B $(\sigma : A \to B)$
$\emptyset \neq \sigma \subseteq A \times B$

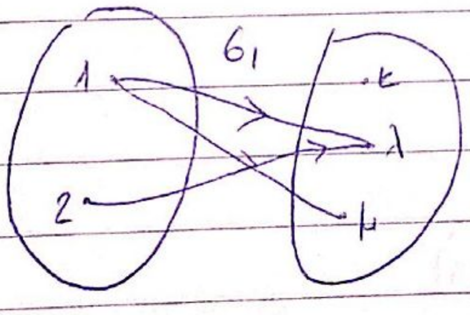
Συμβολισμός: $x\sigma y : (x,y) \in \sigma$

► $A = \{1, 2\}$
$B = \{\kappa, \lambda, \mu\}$

$A \times B = \{(1,\kappa), (1,\lambda), (1,\mu), (2,\kappa), (2,\lambda), (2,\mu)\}$

$\sigma_1 = \{(1,\lambda), (1,\mu), (2,\lambda)\}$

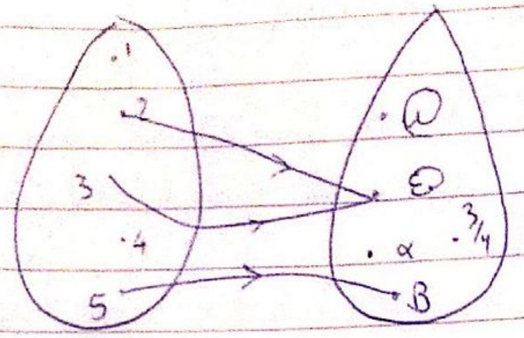
$1\sigma_1\lambda, \ 1\sigma_1\mu, \ 2\sigma_1\lambda$



$\sigma_2 = \{(2,\lambda)\}$

Γράφημα σχέσης: $G_\sigma = \{(x,y) : x\sigma y\}$

Π.Ο. της σχέσης σ
$D(\sigma) = \{x \in A : (\exists y \in B)\ x\sigma y\}$
$R(\sigma) = \{y \in B : (\exists x \in A)\ x\sigma y\}$



$D(\sigma) = \{2,3,5\}$
$R(\sigma) = \{\varpi, B\}$

$\sigma = \{(2,\varpi),(3,\varpi),(5,B)\}$

Αντίστροφη σχέση της σ: σ^{-1}

$\sigma^{-1}: \{(y,x) : x\sigma y\}$

Παράδειγμα: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{\kappa,\lambda,\mu,\nu\}$

$\sigma = \{(1,\kappa),(1,\mu),(3,\lambda)\} \subseteq A\times B$

$\sigma^{-1} = \{(\kappa,1),(\lambda,1),(\lambda,3)\} \subseteq B\times A$

▶ $(x,y) \notin \sigma : x \not\sigma y$

$x \notin D(\sigma) \Leftrightarrow \sim(x\in D(\sigma))$
$\Leftrightarrow \sim(\exists y\in B : x\sigma y)$
$\Leftrightarrow \forall y \in B : x \not\sigma y$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $\sigma, g : A \to B$. Τότε:

i) $\sigma \subseteq g \Leftrightarrow \sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$

ii) $D(\sigma) - D(g) \subseteq D(\sigma - g)$

iii) $R(\sigma) - R(g) \subseteq R(\sigma - g)$

iv) $(\sigma \cup g)^{-1} = \sigma^{-1} \cup g^{-1}$

$\cap$

$-$

vii) $\sigma \subseteq \sigma^{-1} \Rightarrow \sigma = \sigma^{-1}$

Απόδειξη: i) Υποθ. ότι $\sigma \subseteq g$. Θα αποδ. ότι $\sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$

Ας είναι $(x,y) \in \sigma^{-1}$. Τότε $(y,x) \in \sigma \subseteq g$, δηλ. $(y,x) \in g$

$(x,y) \in g^{-1}$

$\Rightarrow \sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$

Αντίστροφα, υποθέτω ότι $\sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$

Θα αποδείξω ότι $\sigma \subseteq g$

$\vdots$

Παρατήρηση: Είναι $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$ (2)

ii) Ας είναι $x \in D(\sigma) - D(g)$

$x \in D(\sigma) \wedge x \notin D(g) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists y \in B)\, x \sigma y \wedge (\forall y \in B,\ x \not g y)$

$\Rightarrow (\exists y \in B)\, (x,y) \in \sigma \wedge [(\forall y \in B)\, (x,y) \notin g]$

$\Rightarrow (x,y) \in \sigma - g \Rightarrow x \in D(\sigma - g)$